

# Genäherte Darstellung starker instationärer Stoßwellen durch Homologie-Lösungen

Von C. F. v. WEIZSÄCKER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

*Otto Hahn zum 75. Geburtstag gewidmet*

(Z. Naturforsch. 9a, 269—275 [1954]; eingegangen am 12. Februar 1954)

Die gasdynamischen Gleichungen werden im ebenen Fall für eine starke instationäre Stoßwelle durch einen Homologie-Ansatz auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen reduziert. Letztere werden numerisch gelöst. Die Lösungen haben stets irgendwo hinter der Front eine Singularität. Trotzdem können sie als genäherte Darstellung wirklicher Stoßwellen verwendet werden, da in Arbeiten, deren Ergebnisse hier vorläufig referiert werden, gezeigt werden wird, daß Lösungen der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen für sehr verschiedene Anfangsbedingungen einer bestimmten Homologie-Lösung mit wachsender Zeit immer ähnlicher werden.

## 1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit gibt einen ersten Bericht über die Rechnungen einer Arbeitsgruppe, die sich mit der Theorie starker instationärer Stoßwellen beschäftigt hat. Hier wird zunächst eine Familie von Lösungen der gasdynamischen Gleichungen eingeführt, die sich aus einem schon mehrmals (so von Taylor<sup>1</sup> und von Guderley<sup>2</sup>) verwendeten Homologie-Ansatz ergibt. Ferner werden die Ergebnisse weitergehender Arbeiten, deren Publikation in Vorbereitung ist, kurz referiert und diskutiert. Ihr wichtigstes Resultat ist, daß Lösungen, die nicht dem Homologie-Ansatz genügen, in einer Reihe von Fällen mit wachsender Zeit einer bestimmten Homologie-Lösung ähnlich werden.

Der Ausgangspunkt unserer Überlegungen war der Wunsch, eine einfache, von wenigen Parametern abhängige Näherungsdarstellung starker instationärer Stoßwellen zu gewinnen. Eine solche Darstellung könnte z. B. dort nützlich sein, wo es sich nicht darum handelt, die Entwicklung einer einzelnen Stoßwelle zu verfolgen, sondern eine statistische Gesamtheit von Stoßwellen zu beschreiben. Diese Aufgabe scheint z. B. in der Theorie der Bewegung des interstellaren Gases vorzuliegen.

Bisher hat man den Homologie-Ansatz nur verwendet, um strenge Lösungen, die bestimmten Anfangs-, Rand- und Symmetrieverhältnissen genügen sollten, zu „erraten“. Daraus ergab sich die Be-

schränkung auf spezielle Glieder der Familie der Homologie-Lösungen (spezielle Werte unseres Exponenten  $k$ ). Im allgemeinen pflegen die Homologie-Funktionen Singularitäten zu enthalten und daher zur strengen Lösung der gasdynamischen Gleichungen ungeeignet zu sein. Da wir sie nur als Näherungslösungen für gewisse Raum- und Zeitintervalle verwenden, sind wir durch die Singularitäten nicht an ihrer Benutzung gehindert; wie es Guderley<sup>3</sup> in einem analogen Fall zweidimensional stationärer Strömung tut, können wir sie in der Nähe der Singularität regulär, aber heterolog fortsetzen.

Unsere Rechnungen beschränken sich auf starke, ebene Stoßwellen. Die erste Einschränkung ist wesentlich: nur für starke Stoßwellen (große Mach-Zahlen) lassen sich die Übergangsbedingungen an der Front mit dem Homologie-Ansatz vereinbaren. Andererseits besteht auch gerade in diesem Grenzfall das Bedürfnis nach einer neuen Berechnungsweise, da hier nicht angenommen werden darf, die Entropie hinter der Front sei von Teilchen zu Teilchen dieselbe, wie es die meisten analytischen Methoden der Gasdynamik tun müssen. Die zweite Einschränkung ist unwesentlich. Früher ist das Verfahren sogar nur auf kugel-, kegel- und zylindersymmetrische Fälle angewandt worden, vermutlich da im ebenen Fall keine im ganzen Raum singularitätenfreie Lösung existiert. Wir haben umgekehrt mit dem ebenen Fall begonnen und die Rechnung noch nicht auf andere Symmetrien ausgedehnt.

<sup>1</sup> G. I. Taylor, The formation of a blast wave by a very intense explosion, Ministry of Home Security R.C. 210, (II, 5—153), 1941. Siehe auch<sup>4</sup>.

<sup>2</sup> Guderley, Luftfahrt-Forsch. 19, 302 [1942].

<sup>3</sup> Guderley, Z. angew. Math. Mech. 22, 121 [1942].



## 2. Überschlagsrechnung für eine „Blockwelle“

Die Suche nach Homologie-Lösungen wurde nahegelegt durch einen physikalischen Gedankengang, der die fortschreitende instationäre Stoßwelle grob schematisiert. Wir stellen uns die durch den Raum wandernde Stoßwelle als einen „Block“ mit einheitlicher Strömungsgeschwindigkeit  $u$  und einheitlicher Dichte  $\varrho$  vor. Dieser Block läuft in ein ruhendes Medium konstanter Dichte hinein. Die Front sei eben und unbegrenzt. Senkrecht zur Front habe der Block die Dicke  $d$ .  $u$ ,  $\varrho$  und  $d$  sind Funktionen der Zeit, die wir nun bestimmen wollen.

Pro Flächeneinheit befindet sich im Block die Masse

$$m = \varrho d \quad \text{mit dem Impuls} \quad J = mu.$$

Wir nehmen zunächst an, die Welle verliere an ihrem hinteren Ende keine Masse; sie würde dann streng genommen ein Vakuum hinter sich lassen. An der Front hingegen sammelt sie ständig Masse auf. Also wächst  $m$  mit der Zeit an. Hingegen muß  $J$ , der Gesamtimpuls pro Flächeneinheit, in dieser Näherung konstant sein. Also nimmt die Strömungsgeschwindigkeit  $u$  mit der Zeit ab.

Von den Übergangsbedingungen an der Front brauchen wir in dieser Abschätzung nur zwei einfache Aussagen: 1. Die Dichte hinter der Front (im „Block“) ist für starke Stöße ein festes Vielfaches der Dichte vor der Front, unabhängig von  $u$  [vgl. Gl. (3b)]. 2. Die Geschwindigkeit  $v$ , mit der die Front selbst fortschreitet, ist ein festes Vielfaches von  $u$  [vgl. Gl. (3a)]. Das bedeutet:

$$\varrho = \text{const}; \quad v = \alpha u, \quad \alpha > 1.$$

Die pro Zeit- und Flächeneinheit aufgesammelte Materie ist demnach

$$\dot{m} = \varrho (v - u) = \beta u, \quad \beta = (\alpha - 1) \varrho.$$

Da der Impuls konstant sein soll, ist

$$\dot{J} = \dot{m}u + \dot{m}u = \beta u^2 + J \dot{u}/u = 0.$$

Die resultierende Differentialgleichung

$$\dot{u} = -\text{const} u^3$$

hat die Lösung  $u = \text{const} t^{-1/2}$ .

Mit  $u \sim t^{-1/2}$  wird dann  $m \sim d \sim t^{1/2}$ .

Durch unseren groben Ansatz haben wir erzwungen, daß die Verteilung von  $u$  und  $\varrho$  über den Raum sich selbst mit wachsender Zeit ähnlich bleibt; die Zeitabhängigkeit ergab sich als Potenz mit dem

„Homologie-Exponenten“  $k = 1/2$ . Die Homologie-Lösungen ergeben sich, wenn man mit demselben Ansatz für die Zeitabhängigkeit die gasdynamischen Gleichungen streng zu lösen sucht. Dabei zeigt sich, daß für jeden Wert von  $k$  Lösungen existieren.

Die Stabilitätsrechnungen (Abschnitt 6) zeigen eine Tendenz vieler Anfangsverteilungen, mit der Zeit in eine Homologie-Lösung überzugehen, in der  $u$  etwas langsamer als in der obigen Abschätzung, nämlich etwa mit  $t^{-0.4}$  abfällt. Qualitativ läßt sich das\* wie folgt deuten. Die Welle wird, wenn man sie als Block schematisiert, in Wirklichkeit am hinteren Ende Materie verlieren. Diese muß also eine geringere Geschwindigkeit als  $u$  annehmen. Damit wird ihr Impuls kleiner, als er war, solange sie noch dem Block angehörte. Die zurückgelassene Materie überträgt also wie bei einer Rakete Impuls auf den Block. Dessen Impuls pro Masseneinheit nimmt somit zu, und daher fällt seine Geschwindigkeit langsamer als nach obiger Abschätzung mit der Zeit ab. Man kann auch diesen Gedankengang durch Einführung einer mittleren Geschwindigkeit und Dichte hinter dem Block quantitativ fassen und erhält dann einen von  $1/2$  abweichenden Exponenten, der aber nur durch zusätzliche Überlegungen über die Energie der Strömung festgelegt werden könnte; wir verzichten auf diese Rechnung, um uns den strengen Lösungen zuzuwenden.

### 3. Die Grundgleichungen

Wir verwenden die Grundgleichungen der Gasdynamik für ein ebenes Problem in der Form

$$\text{Kontinuitätsgleichung: } \varrho_t + u \varrho_x + \varrho u_x = 0, \quad (1a)$$

$$\text{Impulsgleichung: } \varrho u_t + \varrho u u_x + p_x = 0, \quad (1b)$$

$$\text{Entropiegleichung: } s_t + u s_x = 0; \quad (1c)$$

$\varrho$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $s$  sind resp. Dichte, Druck, Strömungsgeschwindigkeit, Entropie der Masseneinheit. Die Entropie kann mittels

$$s = c_v \ln p \varrho^{-\gamma} \quad (2)$$

eliminiert werden.  $\gamma$  ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen, das wir in den numerischen Rechnungen, im Hinblick auf die geplante astrophysikalische Anwendung auf einatomige Gase, zu  $5/3$  angenommen haben.

Diese Gleichungen sind zu ergänzen durch die Übergangsbedingungen an der Front, die wir von

\* Ich verdanke diese Bemerkung Herrn v. Hoerner.

vornherein für den Grenzfall sehr großer Machscher Zahl schreiben, für den wir sie allein zu verwenden haben. Wir schreiben sie für allgemeines  $\alpha$  und für  $\alpha=5/3$

$$u = \frac{2}{\alpha+1} v = \frac{3}{4} v, \quad (3a)$$

$$\varrho = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \varrho_R = 4\varrho_R, \quad (3b)$$

$$p = \frac{\alpha-1}{2} \varrho u^2 = \frac{1}{3} \varrho u^2. \quad (3c)$$

Dabei ist  $v$  die Geschwindigkeit, mit der die Front wandert, und  $\varrho_R$  die Dichte des ruhenden Gases vor der Front.

Es sei erlaubt, eine kurze direkte Ableitung dieser Übergangsbedingungen zu geben, die gewöhnlich aus den komplizierteren Bedingungen für Stöße beliebiger Stärke durch Grenzübergang gewonnen werden. Wir betrachten den Vorgang in dem Bezugssystem, in dem das durch die Front hindurchgegangene Gas gerade zur Ruhe gekommen ist (dieses Bezugssystem ist bei Courant und Friedrichs<sup>4</sup> illustriert). Das Gas der Dichte  $\varrho_R$  strömt in diesem System mit der „absoluten“ Geschwindigkeit  $u$  auf die Front zu, die ihm mit der Relativgeschwindigkeit  $v$  entgegengeht. Der für das verdichtete Gas verfügbare Raum wächst mit der „absoluten“ Geschwindigkeit der Front, d. h. mit  $v-u$ . Die Erhaltung der Masse erfordert daher

$$\varrho (v-u) = \varrho_R v. \quad (4)$$

Das anströmende Gas hat die Impulsdichte  $\varrho_R u$ . Pro Zeit- und Flächeneinheit wird daher der Impuls  $\varrho_R u v$  von der Front verschluckt. Er muß durch die Druckdifferenz aufgefangen werden. Der Grenzfall des starken Stoßes verlangt, daß der Druck im anströmenden Gas vernachlässigt werden kann. Also ist

$$p = \varrho_R u v. \quad (5)$$

Die kinetische Energie des anströmenden Gases pro Masseneinheit ist  $u^2/2$ . Sie wird beim Durchgang durch die Front völlig in Wärme verwandelt, da das Gas ja nachher makroskopisch ruht. Die Wärmeenergie des anströmenden Gases wird wieder vernachlässigt. Also hat das Gas nach dem Durchgang durch die Front die thermische Energie pro Masseneinheit  $u^2/2$  und pro Volumeneinheit  $\varrho u^2/2$ . Nun ist in einem Gas mit  $f$  atomaren (translatorischen oder

rotatorischen) Freiheitsgraden die thermische Energiegedichte  $\varepsilon = f p/2 = p/(\alpha-1)$ . Folglich ist

$$p = \frac{\alpha-1}{2} \varrho u^2. \quad (6)$$

Dies ist bereits die Bedingung (3c); die beiden anderen folgen mühelos aus (4) und (5).

Anschaulich ist wohl das Wichtigste an diesen Bedingungen, daß die Dichte auch bei beliebig starken Stößen nur um den von der Stoßstärke unabhängigen Faktor  $(\alpha+1)/(\alpha-1)$  zunehmen kann. Dies läßt sich aus der eben gegebenen Herleitung physikalisch einleuchtend machen. Die Moleküle des Gases behalten beim Durchgang durch die Front ihre kinetische Energie bei; diese wird nur aus der geordneten Form des Strömens in die ungeordnete der Wärme überführt. Dabei nimmt der Betrag der durchschnittlichen Geschwindigkeitskomponente des Moleküls in der ursprünglichen Flugrichtung nur um einen festen Faktor ab, der daher röhrt, daß die Energie nun über alle Freiheitsgrade gleichmäßig verteilt wird. Ein Teil der „zur Ruhe gebrachten“ Moleküle fliegt den ihnen nachfolgenden mit dieser ihrer thermischen Geschwindigkeit entgegen und bringt sie schon an einem weiter stromaufwärts gelegenen Ort zum Stehen. Je schneller die anströmenden Moleküle sind, desto schneller fliegen ihnen auch die thermischen Moleküle entgegen, und der Ort, an dem sie sich treffen, teilt den mittleren Abstand zweier aufeinanderfolgender Moleküle immer im selben Verhältnis.

#### 4. Der Homologie-Ansatz

Die Gln. (1) enthalten keine dimensionsbehafteten Natur- oder Materialkonstanten. Ihre Form ist daher invariant gegenüber der Skalentransformation von Länge, Zeit und Dichte

$$x = \alpha \bar{x}, \quad t = \beta \bar{t}, \quad \varrho = \gamma \bar{\varrho}, \quad (7)$$

wenn Geschwindigkeit und Druck entsprechend mittransformiert werden

$$u = \alpha \cdot \beta^{-1} \bar{u}, \quad p = \alpha^2 \beta^{-2} \gamma \bar{p}. \quad (8)$$

Hingegen zeichnen die Lösungen derselben Gleichungen im allgemeinen absolute Maße aus und sind daher dann gegenüber der Skalentransformation nicht invariant. Z. B. führt man zur Linearisierung der Gleichungen „ungestörte“ Werte von Dichte und Druck ein und definiert damit zugleich eine absolute Geschwindigkeit, die Schallgeschwindigkeit; periodische Lösungen zeichnen darüber hinaus noch eine Länge, die Wellenlänge, aus. Doch besitzt eine

<sup>4</sup> R. Courant and Friedrichs, Supersonic Flow and Shock waves, Interscience Publishers, New York 1948; Beilage zu S. 124.

gegen eine bestimmte Transformationsgruppe invariante Differentialgleichung auch Lösungen, die gegenüber derselben Gruppe invariant sind („symmetrische Lösungen“). Diese Lösungen interessieren uns hier. Wir nennen sie Homologie-Lösungen.

Wir betrachten nicht die allgemeinste mögliche Homologie-Lösung (vgl. dazu Birkhoff<sup>5</sup>), sondern beschränken uns auf Lösungen, die von einer neuen Variablen

$$\xi = x t^{k-1} \quad (9)$$

und der Zeit nach dem Ansatz

$$\varrho = t^d r(\xi), \quad u = t^{-k} \varphi(\xi), \quad p = t^{d-2k} \psi(\xi) \quad (10)$$

abhängen. Derselbe Ansatz wurde von Guderley und von Courant und Friedrichs für zentral-symmetrische Probleme verwendet. Zum Vergleich stellen wir einige Bezeichnungen dieser beiden Arbeiten den unseren gegenüber:

Guderley <sup>3</sup> :	$\xi$	$n$	$\varrho$	$n \xi v$
Courant-				
Friedrichs <sup>4</sup> :	$\eta^{-\alpha}$	$\alpha = \lambda^{-1}$	$z$	$\Omega$
hier:	$\xi$	$1-k$	$d$	$r(\varrho) \quad \varphi$

$$\alpha \eta^{-\alpha} t^{-1} u \quad (11)$$

Unsere Lösungen sind nur brauchbar, wenn auch die Randbedingungen die Skalentransformation zulassen. Für die Übergangsbedingungen (3) trifft dies zu. Hier liegt der Grund dafür, daß wir uns auf starke Stoße beschränkt haben; die allgemeinen Stoßbedingungen führen durch die Zustandsgrößen vor dem Stoß absolute Maße ein. Die Bedingung (3b) verlangt  $d=0$ . Hingegen bleibt  $k$  beliebig. Die Gln. (10) reduzieren sich damit auf die von nun an benutzte Form

$$\varrho = \varrho(\xi), \quad u = t^{-k} \varphi(\xi), \quad p = t^{-2k} \psi(\xi). \quad (12)$$

Wir wählen ferner von nun an  $z=5/3$ .

Nun heiße der Ort der Front  $X=X(t)$ , und die Werte der Zustandsgrößen am Ort der Front  $P, \Phi$  und  $\Psi$ . Nach (3a) ist

$$v = \frac{dX}{dt} = \frac{4}{3} u(X) = \frac{4}{3} t^{-k} \Phi. \quad (13)$$

Wir versuchen den Ansatz, daß die Front für alle Zeiten an demselben festen Wert  $\xi_F$  liege. Damit wird  $X=\xi_F t^{1-k}$ , und Gl. (13) wird mit

<sup>5</sup> Garrett Birkhoff, Hydrodynamics, a study in logic fact and similitude, Princeton University Press, London 1950.

\* Ich danke Herrn Biermann für die Möglichkeit, die Rechenmaschine für diese und die daran anschlie-

$$\xi_F = \frac{4}{3(1-k)} \Phi \quad (14)$$

erfüllt.

Wir können danach  $\varrho$  und  $\varphi$  durch ihre Frontwerte dimensionslos machen; d.h. wir erfüllen alle Randbedingungen (3) durch die Wahl

$$P = 1, \quad \Phi = 1, \quad \Psi = \frac{1}{3}, \quad \xi_F = \frac{4}{3(1-k)}. \quad (15)$$

Führen wir noch die Hilfsgröße

$$\chi = \varphi + (k-1) \xi \quad (16)$$

ein und setzen in die Grundgln. (1) ein, so erhalten wir die drei gewöhnlichen Differentialgleichungen (Strich heißt Ableitung nach  $\xi$ )

$$\begin{aligned} \chi \varrho' + \varrho \varphi' &= 0, \\ \chi \varrho \varphi' - k \varrho \varphi - \varphi' &= 0, \\ \chi (\varrho \varphi' - \frac{5}{3} \psi \varrho') - 2k \varrho \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Guderley und Courant-Friedrichs erhalten statt dieser drei Gleichungen eine einzige, dafür kompliziertere gewöhnliche Differentialgleichung und zwei Quadraturen. Nach dieser Methode werden die hier vorgelegten Lösungen in einer Arbeit von Häfele diskutiert werden.

Das obige Verfahren ist für alle Werte von  $k$  außer  $k=1$  anwendbar. In diesem Sonderfall muß man statt (9) und (12) den Ansatz

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{4}{3} \ln t, \quad \varrho = \varrho(\xi), \\ u &= t^{-1} \varphi(\xi), \quad p = t^{-2} \psi(\xi) \end{aligned} \quad (18)$$

wählen. Man erhält dann wieder die Gln. (17), wenn man in ihnen

$$\chi = \varphi - \frac{4}{3} \quad (19)$$

wählt und für  $k$  den Wert 1 einsetzt.

### 5. Lösungen für verschiedene $k$

Die Gln. (17) wurden auf der elektronischen Rechenmaschine G 1\* für eine Reihe von  $k$ -Werten numerisch integriert. Das Ergebnis dieser Rechnungen wird im folgenden beschrieben; eine mathematische Analyse wird die Arbeit von Häfele geben.

Die verwendeten Werte lagen im Intervall  $-1 \leq k \leq +2$ . Außerhalb dieses Intervalls sind keine wesentlichen Abweichungen des Lösungstyps

z.B. Rechnungen meiner Mitarbeiter benutzen zu können, Herrn Schlueter für die erste Anleitung zum eigenen Rechnen, und den Herren Hain und F. Meyer für die Mitwirkung bei den Rechnungen.

von dem an den Grenzen des Intervalls geltenden zu erwarten. Im Intervall liegen zwei kritische Werte, an denen sich das Verhalten der Lösungen völlig ändert. Der eine Wert ist  $k=0$ . Er entspricht der stationären Stoßfront, hinter der alle Zustandsgrößen konstant sind; diese ist also ein Sonderfall der Homologie-Lösungen. Der andere kritische Wert hat sich in mühevollen numerischen Rechnungen von Häfele und Hain zu  $k=0,333$  ergeben; ob

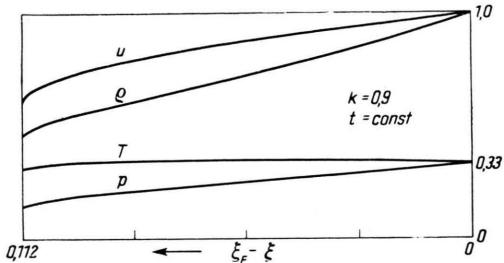


Abb. 1. Lösung im Gebiet I.  $k=0,9$ . Der Ort der Front ist beim Abszissenwert 0. Die Skala auf der Abszissenachse ist in diesen und den folgenden Figuren verschieden gewählt, so daß geometrisch möglichst vergleichbare Bilder entstehen. Der letzte in der Rechnung verwendete Abszissenwert ist jeweils angegeben.

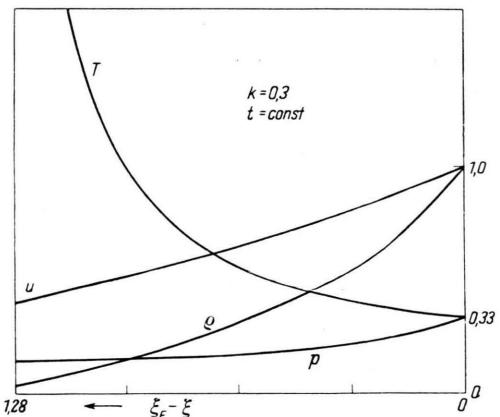


Abb. 2. Lösung im Gebiet II.  $k=0,3$ .

der strenge Wert  $k=1/3$  wäre, konnte bisher nicht ermittelt werden\*\*. Wir unterscheiden drei Gebiete: I:  $k > 0,333$ ; II:  $0,333 > k > 0$ ; III:  $k < 0$ . Die ersten Figuren zeigen je ein Beispiel für die drei Lösungstypen. Als Abszisse ist der Abstand von der Front

$$\varepsilon = \xi_F - \xi$$

gewählt. Aufgetragen sind jeweils  $\varrho$ ,  $u$ ,  $p$  und die Temperatur  $T$ .

\*\* An m. b. d. Korr.: Dies wurde inzwischen von v. Hagenow bewiesen.

Als Beispiel für eine Lösung in I wurde  $k=0,9$  gewählt.  $u$ ,  $\varrho$  und  $p$  nehmen von der Front an nach hinten stetig ab; die Temperatur ist nahezu konstant mit einem flachen Maximum. In der Nähe der Stelle  $\varepsilon=0,1$  werden alle Funktionen plötzlich sehr steil und bekommen bei demselben Abszissenwert schließlich eine senkrechte Tangente. Über diesen Punkt hinaus kann die Lösung nicht fortgesetzt werden. Bei weiterer Rechnung würden die Kurven  $u(\xi)$ ,  $\varrho(\xi)$  usw. umkehren, also für  $\xi$ -Werte zwischen der singulären Stelle und der Front zweideutig werden, für  $\xi$ -Werte, die weiter von der Front entfernt sind, überhaupt keine Lösung ergeben.

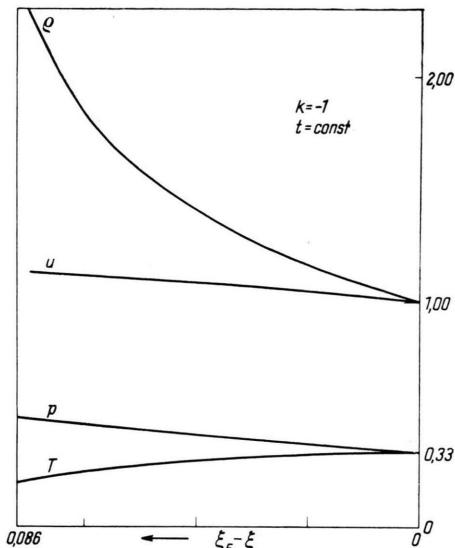


Abb. 3. Lösung im Gebiet III.  $k=-1$ .

Als Beispiel für eine Lösung in II ist die für  $k=0,3$  angegeben.  $u$ ,  $\varrho$  und  $p$  nehmen wieder stetig ab, aber so, daß die Temperatur bei wachsender Entfernung von der Front ständig zunimmt und schließlich bei einem endlichen  $\xi$ -Wert divergiert. Auch hier kann die Lösung nicht über den singulären Punkt hinaus geführt werden.

Als Beispiel für eine Lösung in III stehe  $k=-1$ . Hier nehmen  $u$ ,  $\varrho$  und  $p$  nach hinten, soweit die Rechnung geht, immer weiter zu. Schließlich muß aber eine Singularität ähnlich der in I eintreten. Dies wird in den Arbeiten von Häfele und F. Meyer im einzelnen dargelegt werden.

Ehe wir auf die Singularitäten der Lösungen eingehen, sei ihr Verhalten im regulären Gebiet erörtert. Man kann für jede Zeit  $t$  die Funktionen von  $\xi$  als Funktionen von  $x$  lesen. Diese verändern sich

dann mit der Zeit ähnlich zu sich selbst. Man kann also die Homologie-Lösungen als solche Lösungen charakterisieren, deren Anfangsbedingung gerade eine Weiterentwicklung der Lösung garantiert, bei der sie zu sich selbst ähnlich bleibt. Daher haben wir bei ihnen nicht mehr die Freiheit, eine Anfangsverteilung der Zustandsgrößen vorzugeben.

Die Gl. (9) zeigt, daß sich die  $\xi$ -Skala für  $t=0$  auf einen Punkt zusammenzieht (oder, für  $k>1$ , unendlich gedehnt wird). Wir beschränken die Diskussion auf positive Werte von  $t$ ; für negative  $t$  werden die Lösungen von F. Meyer und Häfele diskutiert werden. Die Homologie-Lösungen zeigen also auch für einen bestimmten Zeitpunkt ein singuläres Verhalten. Physikalisch sinnvoll sind sie von einem Zeitpunkt  $t$  an, der etwas größer als 0 ist. Wir stellen

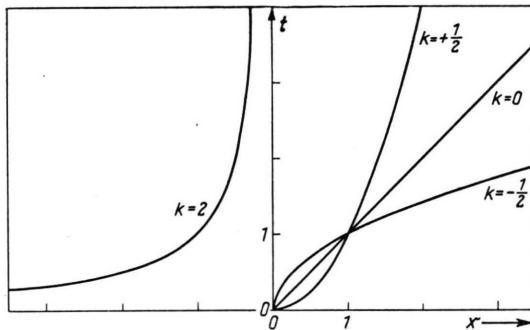


Abb. 4. Frontverläufe im  $x$ - $t$ -Diagramm für verschiedene Werte von  $k$ .

ihr Verhalten dar, indem wir im  $x$ - $t$ -Diagramm die Weltlinie der Front aufzeichnen, nach der aus (14) folgenden Gleichung

$$\chi = \frac{4}{3(1-k)} t^{1-k}. \quad (20)$$

Für  $k=0$  ist sie eine gerade Linie; die stationäre Front läuft mit konstanter Geschwindigkeit. Für  $k<0$  nimmt die Geschwindigkeit mit wachsender Zeit zu ( $u \sim t^{-k}$ ); hier wird die Front durch den hinter ihr herrschenden Überdruck ständig beschleunigt (mit einem wegen der Singularität unendlichen Energievorrat). Für  $0 < k < 1$  wird die Front, die von einem im endlichen gelegenen Ort mit anfangs unendlicher Geschwindigkeit abgeht, stetig verlangsamt, läuft aber mit der Zeit beliebig weit. Für  $k>1$  kommt die Front für  $t=0$  aus dem Unendlichen, wird aber im Endlichen asymptotisch zum Stehen gebracht.

#### 6. Homologie-Lösungen als Näherungs-lösungen

Alle Homologie-Lösungen, außer der für  $k=0$ , haben Singularitäten. Auch die Grenzlösung für  $k=0,33$ , welche zwar die für die Gebiete I und II charakteristischen Singularitäten vermeidet, wird, wie Häfele gezeigt hat, in größerer Entfernung von der Front doch singulär. Wir können daher in unserem ebenen Problem nicht, wie es Guderley im zentrsymmetrischen Problem getan hat, einen Wert von  $k$  durch die Forderung durchgängiger Regularität der Lösung auszeichnen. Es fragt sich, ob die Homologie-Lösungen unter diesen Umständen überhaupt physikalische Bedeutung haben.

Nachdem wir aus solchen Zweifeln heraus die Homologie-Lösungen beiseite gelegt hatten, wurde unser Interesse an ihnen neu erweckt durch eine graphische Lösung der partiellen Differentialgl. (1) für eine willkürlich gegebene Anfangsbedingung, die von E. A. Müller ausgeführt wurde. Es zeigte sich, daß diese Lösung für große Zeiten in der Nähe der Front einer Homologie-Lösung mit einem  $k$ -Wert in der Nähe von 0,4 ähnlich wurde. Wir haben daraufhin das Problem in einer Reihe von Arbeiten wieder aufgenommen. Im folgenden soll über die Fragestellung und über die wichtigsten bisherigen Resultate dieser Arbeiten, die in extenso in dieser Zeitschrift publiziert werden sollen, kurz referiert werden.

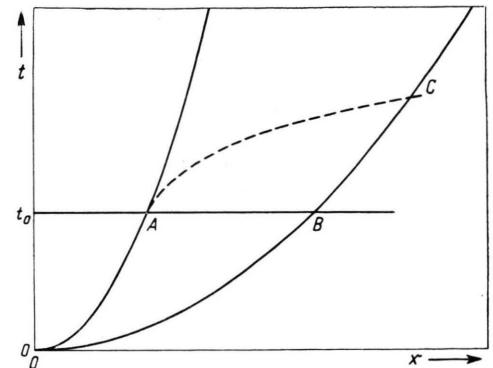


Abb. 5. Abhängigkeitsgebiet einer von B bis A homologen Lösung.

Man kann die Frage stellen, was aus einer Verteilung von  $\varrho$ ,  $u$ ,  $p$  wird, die in einem bestimmten Augenblick dem regulären Teil einer Homologie-Lösung von der Front bis in die Nähe der singulären Stelle gleicht, dort aber dann in einer „geglätteten“ Weise fortgesetzt wird. Sei (Abb. 5) OBC der Frontverlauf und OA die Weltlinie der Singularität der

gewählten Homologie-Lösung (OB und OA sind jeweils Kurven  $\xi = \text{const}$ ), und werde zur Zeit  $t_0$  eine Anfangsverteilung vorgegeben, die von B bis nahezu A der Homologie-Lösung gleich ist, dahinter aber von ihr abweicht, so können wir den weiteren Verlauf der Lösung nach der Charakteristiken-Theorie diskutieren. Die drei Gln. (1) zeichnen 3 Scharen von charakteristischen Kurven aus. Wenn  $a$  die Schallgeschwindigkeit ist, so läuft von jedem Punkt im  $x$ - $t$ -Diagramm eine Charakteristik mit der Geschwindigkeit  $u+a$  nach rechts, eine andere mit der Geschwindigkeit  $u-a$  nach links; zwischen ihnen liegen die Lebenslinien der Geschwindigkeit  $u$ , auf denen die Entropie konstant ist. Der Einfluß der Abweichung der wirklichen Anfangsverteilung von der homologen bei A erreicht die Front erst längs der rechtsläufigen Charakteristik durch A; diese schneide die Front in C. Im Dreieck ABC muß die wirkliche Lösung also mit der Homologie-Lösung übereinstimmen. D. h. wenn man eine Homologie-Lösung längs einer Strecke CA vorgibt, so gibt es ein Abhängigkeitsgebiet dieser Strecke, in dem sich die Homologie-Lösung wegen der Differentialgleichungen selbst aufrechterhält.

v. Hoerner und Hain haben nun durch ausführliche numerische Lösungen der Gln. (1) für verschiedene Anfangsverteilungen gefunden, daß nicht nur diese, auf ein Gebiet beschränkte Tendenz der Homologie-Lösung zur Selbsterhaltung besteht, sondern daß umgekehrt anfangs sehr verschiedene, zunächst durchaus nicht homologe Lösungen mit wachsender Zeit gegen eine und dieselbe Homologie-Lösung konvergieren. Diese hat nach der Rechnung ein  $k$  zwischen 0,38 und 0,40. Abb. 6 zeigt die Lösung für  $k=0,39$ , die im Zusammenhang der unter 5. diskutierten Lösungen schon vorher durch einige Eigenschaften aufgefallen war. Sie hat den allgemeinen Typus der Lösungen des Gebiets I. Sie reicht aber hinter der Front sehr weit und erreicht dort negative Werte der Geschwindigkeit sowie sehr kleine Werte von Druck und Dichte. Während dies für alle Lösungen gilt, die zwischen 0,33 und etwa 0,4 liegen, ist sie außerdem durch den weithin nahezu geradlinigen Verlauf von Geschwindigkeit und Temperatur (Strömungs- und Schallgeschwindigkeit) ausgezeichnet.  $u''$  verschwindet an der Front für  $k=5/13=0,385$ , und  $T''$  für  $k=0,379$ .

Es ist uns bisher nicht vollständig gelungen, die „empirische“ Stabilität dieser Lösung theoretisch

zu begründen. Immerhin hat F. Meyer folgendes gezeigt: Er entwickelte beliebig vorgegebene Anfangsverteilungen in der Nachbarschaft der Front nach Potenzen des Abstands von der Front. Die ersten Entwicklungsglieder können mit den ersten Gliedern einer geeignet gewählten Homologie-Lösung gleichgesetzt werden. So läßt sich ein „effektives  $k$ “ der Anfangsverteilung an der Front bestimmen. Die Entwicklung wird so weit getrieben, daß die Abweichung der Anfangsverteilung von der Homologieverteilung in Erscheinung tritt. Diese Abweichung kann durch gewisse aus den Entwicklungskoeffizienten gebildete Ausdrücke gemessen werden. Nun wird die zeitliche Weiterentwicklung der Anfangsverteilung für kleine Zeitspannen untersucht. Dabei ändert sich natürlich das effektive  $k$ . Es zeigte sich, daß es stabile und labile Regionen der  $k$ -Werte und der „Abweichungskoeffizienten“ gibt, und daß in der Gegend von  $k=0,39$  ein (vielleicht der einzige) Bereich der Stabilität liegt, dergestalt, daß Lösungen, die sich nicht zu weit von  $k=0,39$  unterscheiden, mit der Zeit dorthin tendieren.

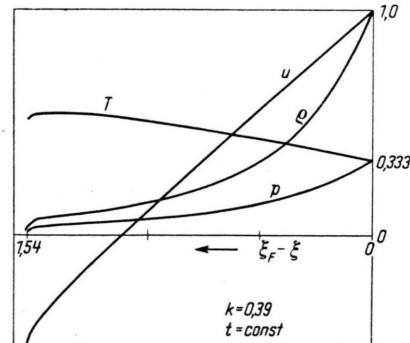


Abb. 6. Lösung für  $k=0,39$ .

Die Grenze dieser Methode liegt darin, daß die Entwicklungslinien schlecht konvergieren. Für größere Gebiete existieren bis jetzt nur qualitative Überlegungen von der in Abschnitt 2 mitgeteilten Art. Ebenso liegen im Augenblick der Abfassung dieser Arbeit noch keine Ergebnisse über die Umformung vor, welche auch die Lösung mit  $k=0,39$  von der Stelle ihrer Singularität her mit der Zeit erleiden muß; wegen der Länge dieser Lösung sind auch die dafür nötigen numerischen Rechnungen sehr zeitraubend.